

AGNIESZKA SABIK

ANALIZA STATECZNOŚCI
POWŁOK WARSTWOWYCH
OBCIĄŻONYCH TERMICZNIE

POLITECHNIKA GDAŃSKA

monografie

126

POLITECHNIKA GDAŃSKA

AGNIESZKA SABIK

ANALIZA STATECZNOŚCI
POWŁOK WARSTWOWYCH
OBCIĄŻONYCH TERMICZNIE



GDAŃSK 2012

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Romuald Szymkiewicz

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

Janusz T. Cieśliński

REDAKTOR SERII

Jerzy M. Sawicki

RECENZENCI

Wojciech Pietraszkiewicz

Krzysztof Wiśniewski

PROJEKT OKŁADKI

Jolanta Cieślawska

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
www.pg.gda.pl/wydawnictwo/oferta

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2012

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978-83-7348-437-5

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Ark. wyd. 7,8, ark. druku 8,5, 126/711

Druk i oprawa: *EXPOL* P. Rybiński, J. Dąbek, Sp. Jawna
ul. Brzeska 4, 87-800 Włocławek, tel. 54 232 37 23

SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW	5
PRZEDMOWA	9
1. WSTĘP	11
1.1. Powłoki warstwowe – charakterystyka	11
1.2. Podejścia stosowane w modelowaniu ośrodków warstwowych	13
1.3. Zagadnienie stateczności powłok	16
1.3.1. Problem stateczności w praktyce inżynierskiej	16
1.3.2. Analiza stateczności	17
1.4. Analiza wyężenia kompozytów warstwowych	19
1.5. Powłoki warstwowe obciążone termicznie	21
1.6. Uzasadnienie podjęcia tematyki pracy	24
1.7. Cel i zakres pracy	24
1.8. Układ i zawartość pracy	25
2. MODEL POWŁOKI	26
2.1. Geometria i kinematyka powłoki	26
2.1.1. Podstawy geometrii powierzchni i elementy rachunku tensorowego	26
2.1.2. Opis przemieszczeń w ramach teorii ścinania pierwszego rzędu	31
2.1.3. Odształcenia w ramach opisu 6-parametrowego	32
2.1.4. Kinematyka powłoki w ramach opisu 5-parametrowego	33
2.2. Obciążenie termiczne	36
2.3. Związek konstytutywny w punkcie ośrodka	38
2.3.1. Związek konstytutywny w układzie osi materiałowych	38
2.3.2. Naprężenia w globalnym układzie odniesienia powłoki	42
2.4. Sformułowanie słabe problemu brzegowego	44
2.5. Związek konstytutywny na poziomie przekroju	48
2.6. Kryterium Tsai-Wu w analizie wyężenia materiału	50
3. IMPLEMENTACJA NUMERYCZNA	53
3.1. Elementy skończone stosowane w analizie	53
3.2. Macierzowa reprezentacja zasady przemieszczeń wirtualnych	54
3.3. Ogólne uwagi o równaniu przyrostowym	56
3.4. Metody śledzenia ścieżek równowagi	58
3.4.1. Sterowanie obciążeniowe	59
3.4.2. Sterowanie parametrem łuku	60
3.5. Analiza nieliniowa z uwzględnieniem imperfekcji	66
3.6. Kontrola wyężenia materiału	66
4. PRZYKŁADY NUMERYCZNE	68
4.1. Izotropowe pasmo płytowe	69
4.2. Płyta sandwiczowa	70
4.3. Płyta warstwowa obciążona gradientem temperatury	73
4.4. Płyta warstwowa o różnych schematach uwarstwienia	76
4.5. Ortotropowa powłoka cylindryczna	78
4.6. Powłoka cylindryczna <i>cross-ply</i>	86
4.7. Powłoka cylindryczna <i>angle-ply</i>	92
4.8. Ortotropowa powłoka sferyczna	95
4.9. Powłoka sferyczna o niesymetrycznym uwarstwieniu	100

5. PODSUMOWANIE	104
BIBLIOGRAFIA	107
Streszczenie w języku polskim	116
Streszczenie w języku angielskim	117
Dodatek A: Zależności przemieszczenia-odkształcenia w ramach teorii 6-parametrowej	118
Dodatek B: Wyznaczanie współczynników korekcyjnych ścinania dla powłok warstwowych.....	124
Dodatek C: Transformacja wewnętrznej pracy wirtualnej	130
Dodatek D: Uogólnione miary naprężeń powłoki	132

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW

Oznaczenia

- A, B, L – wymiary powierzchniowe płyty/powłoki
 a, b, c – lokalne osie materiałowe
 ${}^m \mathbf{a}_i$ – kowariantne wektory bazy lokalnej na powierzchni odniesienia w chwili $t = m$
 ${}^m \mathbf{a}^i$ – kontrawariantne wektory bazy lokalnej na powierzchni odniesienia w chwili $t = m$
 ${}^m \mathbf{a}$ – tensor metryczny bazy lokalnej na powierzchni odniesienia w chwili $t = m$
 ${}^m a_{\alpha\beta}, {}^m a^{\alpha\beta}$ – kowariantne i kontrawariantne składowe tensora metrycznego ${}^m \mathbf{a}$
 ${}^m b_{\alpha\beta}, {}^m b_\beta^\delta$ – składowe tensora krzywizny, odpowiednio, kowariantne i mieszane
 $[C_m]$ – macierz konstytutywna warstwy w układzie osi materiałowych
 $[C]$ – macierz konstytutywna warstwy w układzie osi globalnych
 $\{C_{th,m}\}$ – wektor konstytutywny warstwy związany z temperaturą w osiach materiałowych
 $\{C_{th}\}$ – wektor konstytutywny warstwy związany z temperaturą w osiach globalnych
 ${}^m \mathbf{d}$ – dyrektor w chwili $t = m$
 dS – długość elementarnego odcinka na powierzchni odniesienia powłoki
 ds – długość elementarnego odcinka na dowolnej powierzchni powłoki
 ds^2 – kwadrat długości łuku w technice sterowania parametrem ścieżki
 ${}^0 dV, {}^0 d\Omega, {}^0 dH$ – element objętości, powierzchni i grubości w konfiguracji początkowej
 E_a, E_b – moduły Younga materiału w kierunku równoległym i prostopadłym do włókien zbrojenia
 E – moduł Younga materiału izotropowego
 ${}^m E$ – ogólne oznaczenie odkształceń Lagrange’a-Greena w chwili $t = m$
 ${}^m E^{th}$ – ogólne oznaczenie odkształceń termicznych w chwili $t = m$
 ${}^m E_{mn}^{th}$ – składowe odkształceń termicznych w chwili $t = m$
 ${}^0 E_{mn}$ – przyrosty odkształceń Lagrange’a-Greena
 ${}^m \mathbf{E}, {}^0 E_{mn}$ – tensor odkształcenia Lagrange’a-Greena i jego składowe w konfiguracji $t = m$
 ${}^m \mathbf{e}, {}^m e_{mn}$ – tensor odkształcenia Eulera-Almansi’ego i jego składowe w konfiguracji $t = m$
 ${}^m \mathbf{F}, {}^0 F_{mn}$ – materialny gradient deformacji i jego składowe w konfiguracji $t = m$
 ${}^0 \mathbf{F}, {}^m F_{mn}$ – odwrotność materialnego gradientu deformacji i jej składowe w konfiguracji $t = m$
 \mathbf{F}_{th} – wektor obciążenia termicznego
 \mathbf{F} – wektor sił zrównoważonych
 G_{ab}, G_{ac}, G_{bc} – moduły odkształcalności postaciowej w płaszczyznach a - b , a - c , b - c
 ${}^m \mathbf{g}_i$ – kowariantne wektory bazy lokalnej w dowolnym punkcie w chwili $t = m$
 ${}^m \mathbf{g}^i$ – kontrawariantne wektory bazy lokalnej w dowolnym punkcie w chwili $t = m$
 ${}^m \mathbf{g}$ – tensor metryczny bazy lokalnej w dowolnym punkcie w chwili $t = m$
 ${}^m g_{\alpha\beta}, {}^m g^{\alpha\beta}$ – kowariantne i kontrawariantne składowe tensora metrycznego ${}^m \mathbf{g}$
 H – grubość powłoki
 $[{}^0 \mathcal{H}_{mech}]$ – macierz konstytutywna na poziomie przekroju dla czynnika mechanicznego
 $[{}^0 \mathcal{H}_{th}]$ – macierz konstytutywna na poziomie przekroju dla czynnika termicznego
 i, j, k, m, n – indeksy łacińskie przyjmujące wartości 1, 2, 3
 J – wyznacznik materialnego gradientu deformacji
 k, k_{13}, k_{23} – współczynniki korekcyjne ścinania
 \mathbf{K} – globalna macierz sztywności
 ${}^2 L_{mech}^{mn}$ – uogólnione miary naprężeń mechanicznych w konfiguracji $t = 2$
 ${}^0 L_{mech}^{mn}, {}^0 L_{mech}^{mn}$ – uogólnione miary naprężeń mechanicznych w konfiguracji $t = 1$ i ich przyrosty

${}^2_0L^{\alpha\beta}_{th}$	– uogólnione miary naprężeń termicznych w konfiguracji $t=2$
m	– oznaczenie dowolnej chwili czasowej ($t=m$)
${}^0\mathbf{n}$	– wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni odniesienia w chwili $t=0$
q_M	– przemieszczenie (stopień swobody) w węzle elementu skończonego
$\mathbf{q}, \Delta\mathbf{q}$	– wektor węzłowych przemieszczeń całkowitych i ich przyrostów
$\delta\mathbf{q}$	– wektor poprawki przemieszczeń węzłowych
\mathbf{q}_{imp}	– wektor początkowych imperfekcji geometrycznych
R	– promień powłoki
${}^m\mathbf{r}$	– promień wodzący punktu na powierzchni odniesienia powłoki w konfiguracji $t=m$
${}^m\mathbf{R}$	– promień wodzący dowolnego punktu na grubości powłoki w konfiguracji $t=m$
${}^mS_{ef}$	– oznaczenie ogólne składowych naprężeń efektywnych w konfiguracji $t=m$
${}^mS_{mech}$	– oznaczenie ogólne składowych naprężeń mechanicznych w konfiguracji $t=m$
${}^mS_{th}$	– oznaczenie ogólne składowych naprężeń termicznych w konfiguracji $t=m$
${}^0S_{mech}^{mn}$	– przyrosty składowych naprężeń mechanicznych
${}^2_0S_{mech}^{mn}$	– składowe naprężeń termicznych w konfiguracji $t=m$
S_s	– wytrzymałość materiału warstwy na ścięcie w jej płaszczyźnie
${}^m\mathbf{S}_{ef}, {}^m\mathbf{S}_{ef}^{mn}$	– drugi tensor naprężeń efektywnych Pioli-Kirchhoffa i jego składowe w chwili $t=m$
$\{ {}^0\mathbf{S}_{mech} \}$	– wektor przyrostów uogólnionych miar naprężeń mechanicznych
$\{ {}^2_0\mathbf{S}_{th} \}$	– wektor uogólnionych miar naprężeń termicznych w konfiguracji $t=2$
t	– umowny czas
T_{cr}	– temperatura krytyczna
T_{init}	– temperatura początkowa
T_{TW}	– temperatura zniszczenia
${}^m_0T(\theta^3)$	– przyrost temperatury w dowolnym punkcie na grubości powłoki w chwili $t=m$
${}^m_0T_t, {}^m_0T_b,$	– przyrost temperatury na powierzchni górnej i dolnej powłoki w chwili $t=m$
[T]	– macierz transformacji parametrów materiałowych
u_M	– przemieszczenie w dowolnym punkcie elementu skończonego
${}^m\mathbf{V}$	– wektor przemieszczenia w konfiguracji $t=m$
${}^m v_i, {}^m v^i$	– kowariantne i kontrawariantne składowe wektora ${}^m\mathbf{V}$
X, Y, Z	– współrzędne kartezjańskie
X_t, X_c	– wytrzymałość warstwy na rozciąganie i ściskanie w kierunku włókien
Y_t, Y_c	– wytrzymałość warstwy na rozciąganie i ściskanie w poprzek włókien
α, β, δ	– indeksy greckie przyjmujące wartości 1,2
$\alpha_{aa}^{th}, \alpha_{bb}^{th}$	– współczynniki rozszerzalności termicznej materiału wzdłuż i w poprzek włókien
α^{th}	– współczynnik rozszerzalności termicznej materiału izotropowego
α_k	– kąt orientacji zbrojenia warstwy
δ_{β}^{α}	– delta Kroneckera
$\{ {}^0\mathcal{E}_{mech} \}$	– wektor przyrostów uogólnionych miar odkształceń Lagrange’a-Greena
${}^m\lambda_{th}$	– parametr obciążenia temperaturą
$\Delta\lambda^{th}$	– przyrost parametru obciążenia temperaturą
$\delta\lambda^{th}$	– poprawka parametru obciążenia temperaturą
${}^0\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}$	– symbol Christoffela drugiego rodzaju w chwili $t=0$
${}^0\mu_{\alpha}^{\beta}, {}^0\mu$	– składowe i wyznacznik tensora przesunięcia w chwili $t=0$
v_{ab}	– współczynnik Poissona w płaszczyźnie $a-b$
v	– współczynnik Poissona materiału izotropowego
Π	– całkowita energia potencjalna
${}^2_0\boldsymbol{\sigma}_{ef}, {}^2_0\boldsymbol{\sigma}_{ef}^{ij}$	– tensor naprężeń efektywnych Cauchy’ego i jego składowe

- $\frac{1}{2}\sigma_{mech}^{ij}, \frac{1}{2}\sigma_{th}^{ij}$ – składowe naprężeń Cauchy’ego: mechaniczne i termiczne
 $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ – współrzędne krzywoliniowe

Skróty

- DL (LW) – dyskretny model warstwowy (ang. *Discrete-Layer* lub *Layer-Wise*)
ESL – model pojedynczej warstwy zastępczej (ang. *Equivalent Single Layer*)
FI – indeks zniszczenia (ang. *Failure Index*)
FI – pełne całkowanie sztywności elementu skończonego
FPF – model zniszczenia pierwszej warstwy laminatu (ang. *First-Ply Failure*)
LPF – model zniszczenia ostatniej warstwy laminatu (ang. *Last-Ply Failure*)
LRT5 – 5-parametrowy model teorii powłok z uwzględnieniem dużych obrotów (ang. *Large Rotation Theory*)
MES – Metoda Elementów Skończonych
SRI – selektywnie zredukowane całkowanie sztywności elementu skończonego
URI – jednolicie zredukowane całkowanie sztywności elementu skończonego

PRZEDMOWA

Niniejsza praca powstała na podstawie maszynopisu rozprawy doktorskiej¹⁾ pt. *Numeryczna analiza kompozytowych powłok warstwowych z uwzględnieniem wpływów termicznych*, powstałej pod kierunkiem dr. hab. inż. Ireneusza Krei, prof. nadzw. PG. Rozprawa ta stanowiła podstawę do nadania Autorce tytułu doktora nauk technicznych z wyróżnieniem przez Radę Wydziału Inżynierii Lądowej i Środowiska Politechniki Gdańskiej w dniu 18.01.2012 roku. Uwzględniając uwagi Recenzentów przewodu doktorskiego oraz wnioski z dyskusji podczas publicznej obrony, wprowadzono do niniejszego wydania pewne zmiany, w tym m.in. zmianę tytułu pracy, który w obecnym brzmieniu w większym stopniu odzwierciedla jej zawartość.

Przedmiotem pracy jest analiza stateczności kompozytowych powłok warstwowych poddanych obciążeniu termicznemu. W ramach realizacji tego celu rozbudowane zostało podejście zaproponowane w monografii [79]. Sformułowanie opisane w [79] umożliwia analizę obciążonych mechanicznie kompozytowych powłok warstwowych w zakresie geometrycznie nieliniowym. Dla potrzeb niniejszej pracy powyższy model rozszerzono na zakres obciążeń termicznych, jak również dodano moduł analizy stanu naprężenia i wytężenia w warstwach laminatu, co wzbogaca informację o globalnej nośności badanej konstrukcji.

Wydanie niniejszej monografii uzyskało dofinansowanie z dotacji celowej na prowadzenie w 2011 r. badań naukowych lub prac rozwojowych oraz zadań z nimi związanych, służących rozwojowi młodych naukowców oraz uczestników studiów doktoranckich, finansowanych w wewnętrznym trybie konkursowym.

¹⁾ Sabik A.: Numeryczna analiza kompozytowych powłok warstwowych z uwzględnieniem wpływów termicznych. Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, 2012.

Praca doktorska zrealizowana w ramach projektu badawczego własnego pt. *Nieliniowa teoria i analiza deformacji i stateczności warstwowych powłok kompozytowych metodą elementów skończonych* w ramach umowy nr 2542/B/T02/2009/37 do wniosku nr N N506 254237 z Ministrem Nauki i Szkolnictwa Wyższego.